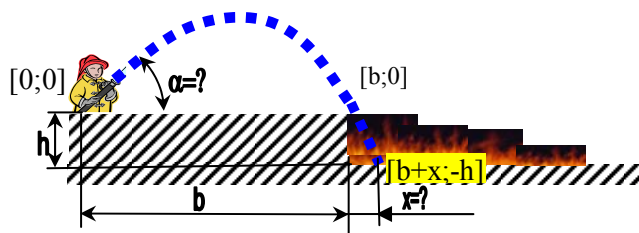


V jámě o hloubce $h=2\text{ m}$ vznikl požár. Hasič se pro žár může přiblížit k okraji jámy na minimální vzdálenost $b=5\text{ m}$. Hasičskou hadicí proudí voda rychlostí $v_0=8\text{ m/s}$. Určete pod jakým úhlem $\alpha=?$ má hasič nastavit hadici, aby voda stříkala co nejbližší k okraji jámy a do jaké nejbližší vzdálenosti $x=?$ od kraje jámy voda dopadne. (pasivní odpory zanedbejte)



Řešení:

Aby voda dopadala co nejbližší okraji musí jen těsně míjet horní roh jámy. Voda se při zanedbání pasivních odporů pohybuje šikmým vrhem. Pro složky dráhy ve směru vodorovné a svislém platí:

$$s_x = (v_0 \cos(\alpha) \cdot t) + s_{0x}$$

$$s_y = \left(\frac{-1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right) + v_0 \sin(\alpha) \cdot t + s_{0y}$$

kde s_x je dráha ve směru vodorovném, s_y ve směru svislém,
 s_{0x} , s_{0y} jsou počáteční dráhy ve vodorovném a svislém směru
 α je úhel pod kterým voda opouští hadici, g tíhové zrychlení
 v_0 je počáteční rychlost vody, t čas

Umístíme-li si počátek souřadného systému na konec hadice [0;0] (odtud $s_{0x}=s_{0y}=0$) pak roh u jámy má souřadnice [b;0] toho využijeme při řešení. napíšeme rovnice pro tento roh.

V těchto dvou rovnicích jsou dvě neznámé (úhel α a čas t_1)

$$b = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$$

Jsou to, ale rovnice nelineární. řešíme např. tak, že si z druhé rovnice vyjádříme čas (předpokládáme, že je nenulový)

$$0 = \left(\frac{-1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right) + v_0 \sin(\alpha) \cdot t$$

$$t = 2 \cdot v_0 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{g}$$

a dosadíme do první rovnice a dostaneme

$$b = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(2 \cdot v_0 \cdot \frac{\sin(\alpha)}{g} \right)$$

Což už je jediná rovnice ve které je neznámou úhel α . Využijeme známého vztahu

$2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \sin(2 \cdot \alpha)$ a po dosazení:

$$b = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \quad 2 \cdot \alpha = \arcsin \left(b \cdot \frac{g}{v_0^2} \right)$$

Pozor nesmíme zapomenout, že v intervalu 0 až 360 stupňů mají stejnou velikost sinu dva úhly (kromě 90° a 270°). Pro zadané hodno vychází $2\alpha_1=50^\circ$ a $2\alpha_2=130^\circ$, tedy úhly jsou $\alpha_1=25^\circ$; $\alpha_2=65^\circ$.

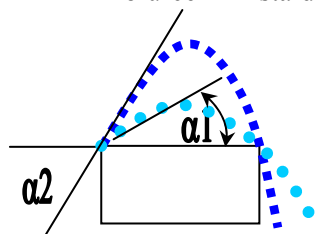
Zde oba úhly mají význam. Z nákresu je patrné že blíže ke hraně dopadne voda, která opouští hadici pod úhlem α_2 (lze se přesvědčit následující výpočet jestliže jej provedeme pro oba úhly).

Pro určení místa dopadu použijeme rovnice pro souřadnice bodu [b+x;-h]. Úhel už známe, ale čas je jiný. Počítám jen pro úhel $\alpha=\alpha_2=65^\circ$. Z těchto rovnic lze vypočítat t_2

$$b + x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t_2$$

$$-h = \left[\frac{-1}{2} \cdot g \cdot (t_2)^2 \right] + v_0 \sin(\alpha) \cdot t_2$$

a x (pozn. druhá rovnice je kvadratickou rovnicí pro t_2 a záporný čas nemá smysl) její řešení $t_2=1,716\text{ s}$ dosadíme do první rovnice a dostaneme: $x_{\min}=0,804\text{ m}$. (pozn. pro α_1 vyjde $x_{\min}=2,76\text{ m}$)



Odpověď:

Hasič má nastavit hadici pod úhlem $\alpha=65^\circ$ a nejbližší vzdálenost do které voda dopadne je $x_{\min}=0,804\text{ m}$.