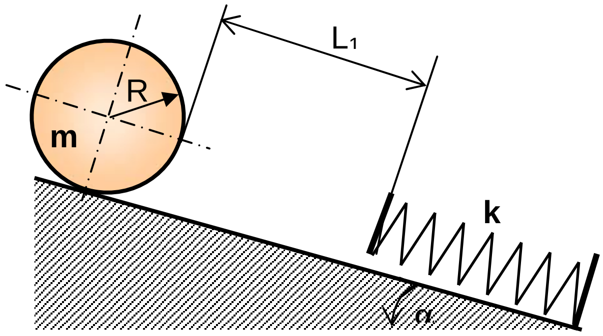
Těleso válcového tvaru leží na nakloněné rovině. Jeho hmotnost je **m,** poloměr **R**. V jistém okamžiku dojde k jeho odbrždění a těleso se začne odvalovat směrem dolů po nakloněné rovině. Po uražení vzdálenosti $\mathbf{L_1}$ těleso narazí na pružinu tuhosti **k**, která začne brzdit jeho pohyb.
Vypočítejte celkovou vzdálenost **L**, kterou urazí těleso od okamžiku odbrždění do okamžiku zastavení.
Pozn.: Uvažujte lineární pružinu, neuvažujte tření mezi tělesem a koncem pružiny. Mezi tělesem a nakloněnou rovinou nedochází k prokluzu.

$m = 50$ kg
$R = 0{,}4$ m
$k = 3600$ N/m
$\alpha = 20°$
$L_1 = 0{,}6$ m



Řešení:

Úlohu je možné řešit klasicky pomocí pohybových rovnic, my zde ale použijeme zákon o změně kinetické energie. Úlohu je třeba rozdělit do 2 fází – bez působení pružiny a s působením pružiny. Pro obě fáze platí, že pohyb válce je obecný rovinný a lze jej rozložit na posun rychlostí středu **v** a rotaci kolem středu úhlovou rychlostí **ω**. Pokud se válec valí bez prokluzu, platí:

$$v = R \cdot \omega$$

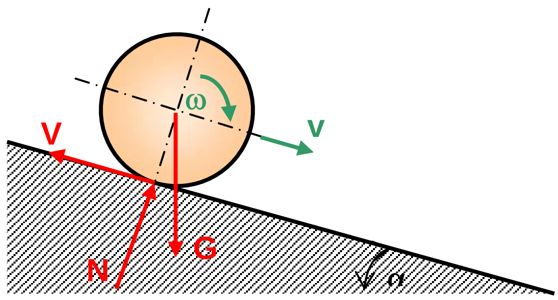
Moment setrvačnosti válce a tíhová síla:

$$I = \frac{1}{2} mR^2 = 4 \text{ kg m}^2$$

$$G = mg = 490{,}3 \text{ N}$$

1. fáze – Od odbrždění do okamžiku nárazu na pružinu, těleso urazí dráhu $\mathbf{L_1}$. Počáteční kinetická energie je nulová, ve směru pohybu koná práci složka tíhové síly po dráze $\mathbf{L_1}$. (Vazbové síly **N** a **V** práci nekonají.) Na konci tohoto úseku bude mít střed válce rychlost $\mathbf{v_1}$:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 = G \cdot \sin\alpha \cdot L_1$$



Odtud:

$$v_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot L_1 \cdot \sin\alpha}{3}} = 1{,}638 \text{ m/s}$$

2. fáze – Stlačování pružiny, počáteční rychlost středu válce je $\mathbf{v_1}$, konečná rychlost je nulová. Ve směru pohybu působí opět složka tíhové síly po neznámé dráze $\mathbf{L_2}$, proti směru pohybu působí direkční síla v pružině $\mathbf{F_D}$. Pružina se stlačí o délku $\mathbf{L_2}$. Práce vykonaná pružinou je:

$$\int_0^{L_2} kx \cdot dx = \frac{1}{2} k \cdot L_2^2$$

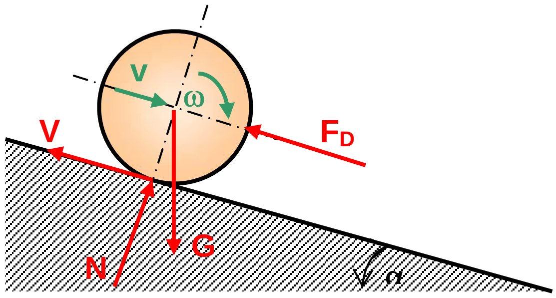
Po dosazení do zákona o změně kinetické energie:

$$-\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_1^2 = G \cdot \sin\alpha \cdot L_2 - \frac{1}{2} k \cdot L_2^2$$

Odtud:

$$L2 = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha + \sqrt{(m \cdot g \cdot \sin\alpha)^2 + 1{,}5 \cdot k \cdot m \cdot v_1^2}}{k} = 0{,}288 \text{ m}$$

(Druhý kořen kvadratické rovnice je záporný, takže se jím nemusíme zabývat.)



Celkovou dráhu **L**, kterou válec urazí, určíme jako součet drah $\mathbf{L_1}$ a $\mathbf{L_2}$:

$$L = L_1 + L_2 = 0{,}888 \text{ m}$$