Těleso o hmotnosti **m** je zavěšeno na pružině o tuhosti **k**. Do kmitavého pohybu je uvedeno vychýlením z rovnovážné pozice o vzdálenost $\mathbf{x_0}$ dolů a v čase t = 0 s je z této deformované pozice uvolněno. Určete konstantu doznívání **δ** kmitavého pohybu, jestliže víte, že po **N** periodách bude výchylka kmitání oproti počáteční výchylce poloviční.

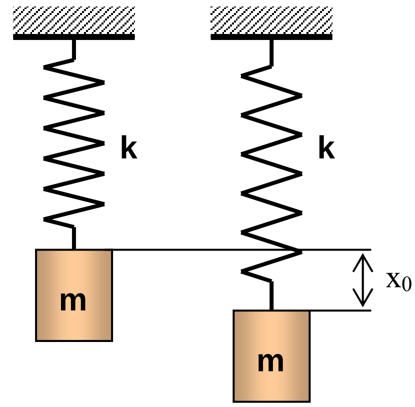
m = 0,4 kg

k = 2 N/mm

x_0 = 5 cm

N = 10

(v_0 = 0 m/s)



Řešení:

Víme, že časový průběh výchylky u volného tlumeného kmitání je:

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t))$$

Konstanty **A** a **B** získáme dosazením počátečních podmínek $\mathbf{x_0}$ a $\mathbf{v_0}$ do tohoto vztahu a do vztahu pro rychlost, který získáme derivací vztahu pro výchylku. Dostaneme (bez odvození):

$$A = x_0$$

$$B = \frac{A \cdot \delta}{\Omega}$$

Vyčíslit konstantu **B** zatím nemůžeme, protože neznáme vlastní kruhovou frekvenci tlumeného kmitání **Ω** ani konstantu doznívání **δ**. Víme ale, že po **N** periodách bude výchylka oproti počáteční výchylce poloviční. Můžeme tedy napsat:

$$\frac{x(0 \cdot s)}{x(N \cdot T)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^{0} \cdot (A \cdot \cos(\Omega \cdot 0 \cdot s) + B \cdot \sin(\Omega \cdot 0 \cdot s))}{e^{-\delta \cdot N \cdot T} \cdot (A \cdot \cos(\Omega \cdot N \cdot t) + B \cdot \sin(\Omega \cdot N \cdot t))} = e^{\delta \cdot N \cdot T}$$

Odtud:

$$e^{\delta \cdot N \cdot T} = 2$$

Získali jsme rovnici, kde se vyskytují 2 neznámé - δ a **T**. Periodu **T** můžeme vyjádřit jako:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\Omega o^2 - \delta^2}}$$

Vlastní kruhovou frekvenci netlumeného kmitání $\mathbf{\Omega_0}$ známe, je dána vztahem:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 70{,}711 \text{ s}^{-1}$$

Po dosazení za periodu **T** do vztahu $e^{\delta \cdot N \cdot T} = 2$ dostaneme:

$$e^{\delta \cdot N \cdot \frac{2\cdot\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}}} = 2$$

Po úpravách:

$$\delta = \frac{\Omega_0 \cdot \ln 2}{\sqrt{(2\pi N)^2 + (\ln 2)^2}} = 0{,}78\ \mathrm{s}^{-1}$$

Tím je splněno zadání úlohy. Pro úplnost si však znázorníme průběh výchylky kmitání v čase. K tomu potřebujeme znát ještě:

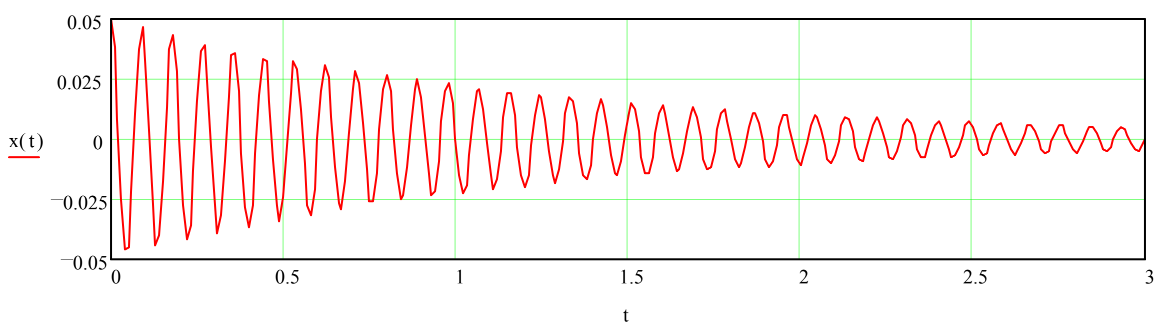
$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = 70{,}706\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$A = x_0 = 0{,}05\ \mathrm{m}$$

$$B = \frac{A \cdot \delta}{\Omega} = 0{,}55 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

Potom výchylka v závislosti na čase:

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (A \cdot \cos(\Omega t) + B \cdot \sin(\Omega t))$$



Perioda tlumeného kmitání je:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 0{,}0889\ \mathrm{s}$$

Doba trvání N period:

$$N \cdot T = 0{,}889\ \mathrm{s}$$

Za tuto dobu bude výchylka oproti počáteční výchylce $\mathbf{x_0}$ poloviční, což je z grafu dobře patrné.