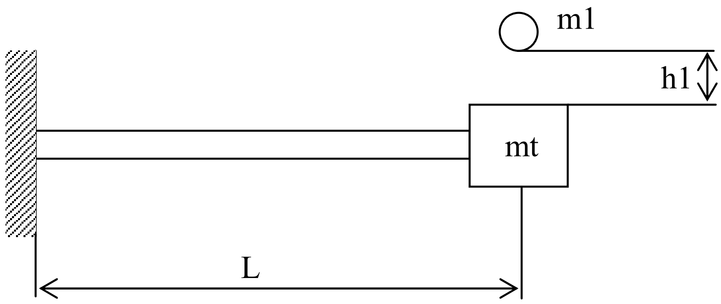
el_dyn1_11a_z

Na hmotu mt na konci nosníku U10 délky L a momentu setrvačnosti J dopadne těleso o hmotnosti m1 z výšky h1. Určete tuhost nosníku, vlastní kruhovou frekvenci a amplitudu kmitání.

Dáno:
J = 29,3 cm^4
m1 = 8 kg
mt = 110 kg
h1 = 3,2 m
E = 2,1.10^5 MPa
L = 1,3 m



Pomůcka: Pro výpočet počáteční rychlosti kmitání nosníku v0 užijte vztah odvozený pro ráz dvou těles (mt a m1):

$v0 = \dfrac{2m1.v1}{m1+mt}$, kdy v1 je rychlost tělesa m1v okamžiku dopadu na těleso mt.

Řešení:

Tuhost nosníku určíme pomocí Castiglianovy věty. Uvažujeme – li, že nosník je na volném konci zatížen silou F, pak průhyb v tomto místě lze určit ze vztahu:

$$y = \frac{1}{EJ}\int_0^l M(x)\frac{\partial M(x)}{\partial F}dx,$$

kde $M(x) = F.x$ a $\dfrac{\partial M(x)}{\partial F} = x$

Po integraci a dosazení integračních mezí dostáváme $y = \dfrac{Fl^3}{3EJ}$

Vyjádřením tuhosti k ze vztahu $F = k.y$ získáme hledanou tuhost k:

$$k = \frac{F}{y} = \frac{F}{\frac{Fl^3}{3EJ}} = \frac{3EJ}{l^3} = \frac{3.2{,}1.10^{11}.2{,}93.10^{-7}}{1{,}3^3} = 84019\frac{N}{m}$$

Rychlost dopadu tělesa na koncový bod nosníku vypočteme např. ze zákona zachování mechanické energie. (Nulovou hladinu potenciální energie volíme v místě dopadu tělesa).

Kinetická energie na počátku pádu: $W_{K1} = 0J$
Potenciální energie na počátku pádu: $W_{P1} = m1.g.h1$

Kinetická energie při dopadu: $W_{K2} = \frac{1}{2} m1.v1^2$

Potenciální energie při dopadu: $W_{P2} = 0J$

Hledanou rychlost při dopadu získáme porovnáním celkové energie na počátku pádu a při dopadu:

$$m1.g.h1 = \frac{1}{2} m1.v1^2 \Rightarrow v1 = \sqrt{\frac{2.m1.g.h1}{m1}} = \sqrt{2.9{,}81.3{,}2} = 7{,}92 \frac{m}{s}$$

Abychom vypočetli rychlost v0, kterou se bude nosník pohybovat na počátku kmitání, užijeme výše uvedený vztah, ze kterého již lze rychlost v0 přímo vypočíst:

$$v0 = \frac{2m1.v1}{m1 + mt} = \frac{2.8.7{,}92}{8 + 10} = 1{,}07 \frac{m}{s}$$

Vlastní kruhovou frekvenci lze spočíst ze vztahu

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{mt}} = \sqrt{\frac{84019}{110}} = 27{,}64 Hz$$

Velikost výchylky kmitání v závislosti na čase budeme hledat ve tvaru:

$$y(t) = C.\sin(\Omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{nebo}$$
$$y(t) = A.\cos(\Omega_0 t) + B.\sin(\Omega_0 t),$$

kde C je hledaná velikost amplitudy kminání.

Aby bylo možno určit hodnoty konstant A a B (a tím i C), je nutno řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých A a B při známých počátečních podmínkách:

$$y(t) = A.\cos(\Omega_0 t) + B.\sin(\Omega_0 t)$$
$$\dot{y}(t) = -A.\Omega_0 \sin(\Omega_0 t) + B.\Omega_0.\cos(\Omega_0 t)$$

Uvažujeme následující počáteční podmínky (pro čas $t = 0$)

$$y(t = 0) = 0$$
$$\dot{y}(t = 0) = v0 = 1{,}07 \frac{m}{s}$$

Řešením dané soustavy rovnic pro neznámé A a B dostáváme:

$$A = 0$$
$$B = 0{,}039 ,$$

potom $C = \sqrt{A^2 + B^2} = 0{,}039m$, což je hledaná amplituda kmitání.